Los conejos de Fibonacci

Por Luciano Boschi

Fibonacci fue el matemático más importante de la edad media. Lo recordamos especialmente en análisis técnico por una sucesión de números que tienen interesantes propiedades y que se utilizan mucho en matemáticas.

Recopiló y divulgó el conocimiento matemático de clásicos grecorromanos, árabes e indios y realizó aportaciones en los campos del álgebra y la teoría de números e introdujo los números arábigos en Europa.

Leonardo de Pisa (conocido como *Fibonacci*, contracción de *filius Bonacci*, es decir *el hijo de Bonacci*) nace en Pisa, probablemente hacia 1170 y muere alrededor de 1250. Al ser su padre representante comercial de la ciudad de Pisa en Argelia, estuvo en contacto con la cultura árabe, interesándose especialmente por sus matemáticas.

La serie de números que hizo célebre es aquella donde cada término es igual a la suma de los dos términos anteriores: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, y así sucesivamente. Desde el punto de vista técnico, es realmente una secuencia y no una serie.

Su obra principal fue el Liber Abaci (o Libro acerca del Ábaco), una extensa obra que contiene casi todo el conocimiento algebraico y aritmético de la época. En ella Fibonacci exponía entre otras cosas, la importancia del sistema de numeración indo-arábigo. Escrito en 1202, sólo se conserva la versión de 1228 (segunda versión). En él aparece (Págs. 123 y 124) un problema sobre el nacimiento de conejos y que nada tuvo de significativo hasta que, a comienzos del siglo pasado, fue objeto de numerosos estudios que permitieron descubrir muchas de las propiedades que tiene. Aunque anteriormente Johannes Kepler (1571-1630) ya había relacionado la sucesión de Fibonacci con la proporción áurea y el crecimiento de las plantas.

Los conejos

El problema a resolver es el siguiente:

1) Supongamos que en un huerto cerrado tenemos una pareja de conejos (macho y hembra) de un mes de edad que aún no pueden reproducirse, pero que podrán hacerlo al segundo mes de edad.

2) Supongamos también que la gestación es de un mes y cada mes, a partir del segundo, cada pareja de conejos dará origen siempre a otra nueva pareja de conejos (también macho y hembra).

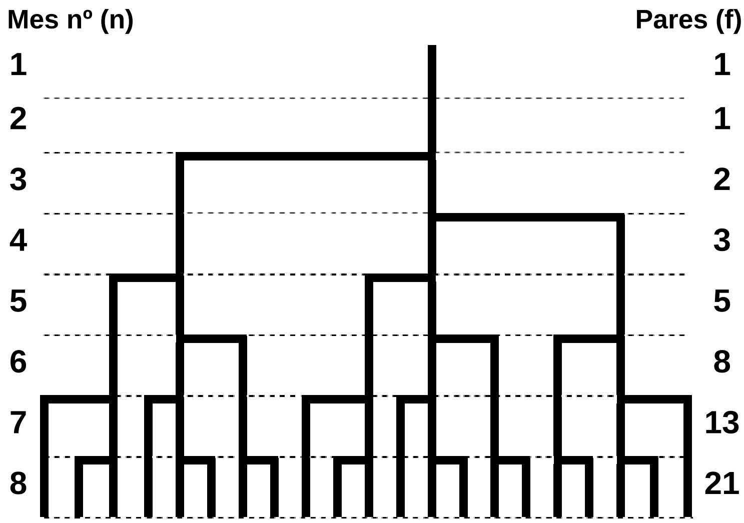
3) Si cada pareja de conejos se reproduce de la misma forma que la pareja inicial, y si suponemos que no se mueren, ¿cuántas parejas habrá en cada mes? ¿Y al año de nacimientos?

Analicemos la solución del problema:

Tenemos una pareja joven, sexualmente inmadura, que al mes siguiente es capaz de reproducirse. Pasa ella misma al siguiente mes y además procrea una nueva pareja; y cada pareja joven, se vuelve una pareja madura capaz de reproducirse.

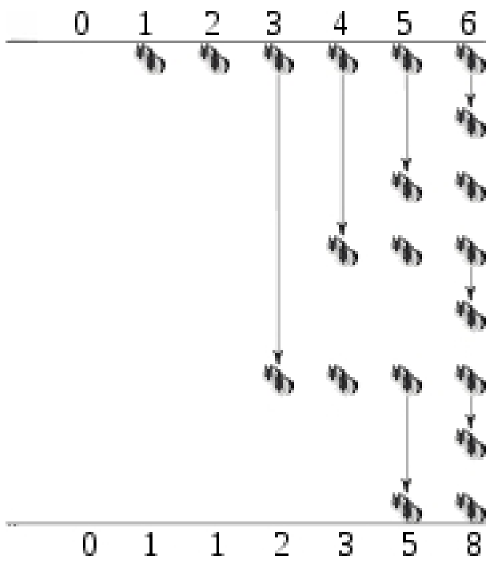
Como la primera pareja de conejos tiene descendencia en el segundo mes, dobla el número y, en el tercer mes, se tienen dos parejas. De éstas, una pareja, la primera, también tiene descendencia en el mes siguiente, de manera que en el cuarto mes hay tres parejas. De ésas, dos parejas tienen descendencia en el mes siguiente (la segunda allí alcanza su madurez reproductiva), de modo que en el quinto mes han nacido dos parejas adicionales de conejos, y el número total de parejas de conejos llega a cinco. En dicho mes tres de estas cinco parejas tienen hijos y, en el sexto, el número de parejas llega a 8. Cinco de estas parejas producen otras cinco parejas, las cuales, junto con las 8 parejas ya existentes, hacen 13 parejas en el séptimo mes. Cinco de estas parejas no tienen hijos en ese mes, mientras que las restantes ocho parejas tienen descendencia, de modo que en el octavo mes se tienen 21 parejas. Sumando a éstas las 13 parejas que nacen en el noveno mes, se obtiene un total de 34 parejas. Sumando a éstas las 21 parejas que nacen en el décimo mes, el total es de 55 parejas. Sumando a éstas las 34 parejas que nacen en el undécimo mes, se obtienen 89 parejas. Agregando a éstas las 55 parejas que nacen en el duodécimo mes, se tiene un total de 144 parejas. Agregando a éstas las 89 parejas que nacen en el décimo tercer mes, se llega a un total de 233 parejas. Finalmente, sumando a éstas 144 parejas que nacen en el último mes, se obtiene en total 377 parejas, al cabo de un año de nacimientos originados por la primera.

En el gráfico siguiente podremos ver la evolución de los primeros 8 meses.



Y si continuamos hasta el mes 14º (12º de gestaciones), habrá 377 parejas de conejos.

El siguiente es otro gráfico para visualizar el mismo concepto:



En honor de Fibonacci, la sucesión definida (**f**) recibe el nombre de secuencia de Fibonacci y sus términos, números de Fibonacci. Su fórmula es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n >= 3 \text{ siendo } f_1 = f_2 = 1$$

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son:

$\mathbf{f_1 = 1}$

$\mathbf{f_2 = 1}$

$\mathbf{f_3 = f_2 + f_1 = 2}$

$\mathbf{f_4 = f_3 + f_2 = 3}$

$\mathbf{f_5 = f_4 + f_3 = 5}$

$\mathbf{f_6 = f_5 + f_4 = 8}$

$\mathbf{f_7 = f_6 + f_5 = 13}$

Es decir: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229**,... Tiene un crecimiento exponencial.

En ella $\mathbf{f_{14} = 377}$ es el resultado buscado por Fibonacci al problema de los conejos.

Se han descubierto muchas propiedades bellas e interesantes de la sucesión. Los números de la secuencia de Fibonacci aparecen en los lugares más insospechados.

Por ejemplo en los girasoles las semillas se ordenan en forma de espirales. Unas giran hacia la izquierda y otras hacia la derecha. Pues bien, si se cuentan las que hay en cada sentido se puede comprobar que son números consecutivos de la serie de Fibonacci. También las estructuras naturales, como el crecimiento de hojas en espiral en algunos árboles, presentan con frecuencia la forma de la sucesión de Fibonacci.

Sus proporciones son agradables para la vista y el oído, por ejemplo, la música se basa en la octava, de ocho notas y se representa con 8 teclas, en las cuales 5 son negras, en total, 13.

También se sabe que algunas partes del cuerpo humano guardan esa proporción 'de oro'; por ejemplo en el dedo, entre la distancia entre la 1ª y la 2ª falange y entre la 2ª y la 3ª. Hacia 1850 Zeysing constató estadísticamente que el ombligo divide al cuerpo humano según la 'razón áurea' (0.618033989... que surge de dividir 317811 por 514229).

La base matemática para la teoría del Principio de las Ondas es la secuencia numérica descubierta por Leonardo Fibonacci en el siglo XIII, y que en 1938 publicó Raph Nelson Elliot (1871/1948). Esta teoría comenzó a popularizarse a partir de 1953. En 1980 Robert Prechter recopiló sus originales y los publicó en 'The major works of R. N. Elliot'. Desde entonces, Prechter es la mayor autoridad en esta materia.

Las ondas de Elliot intentan dar una idea global de la evolución del mercado, que facilita su entendimiento y da 'alertas' anticipadas de su dirección. Su interpretación permite detectar con anticipación los cambios de tendencias cuando los precios están cerca de los números descubiertos por Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci presenta numerosas propiedades que la han hecho particularmente atractiva. Existe una publicación denominada The Fibonacci Quarterly, publicada por la Fibonacci Association donde, a partir de los años 60, se recogen y estudian múltiples propiedades de esta sucesión y las derivadas de ella. Veremos algunas de estas propiedades ahora.

La secuencia numérica es: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,** y así hasta el infinito, donde **cada número sucesivo es la suma de los dos números anteriores**.

Comenzando la secuencia por 1, se tiene: **1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, ... , 8 + 13 = 21**

Al dividir dos números consecutivos de la serie de Fibonacci, el resultado converge a **0,618** ó **1,618** según sea el numerador y el divisor.

Al dividir dos números alternos de la serie, la relación dará **0,382** siendo su inverso **1,618**.

Estos números poseen un número intrigante de correlaciones, tales como el hecho de que cualquier número dado es aproximadamente **1,618** veces el número precedente así como aproximadamente **0,618** veces el número siguiente

La forma básica de la onda de Elliot siempre se divide en números de Fibonacci.Los números usados más corrientemente son el **61,8%**, el **38%** y el **50%**.

Los mercados suelen retroceder a posiciones anteriores en determinados porcentajes esperados, y los más conocidos son el **33**, el **50** y el **67**%.

La serie de Fibonacci ajusta estas cifras un poco más. Durante una tendencia fuerte, un retroceso mínimo suele rondar el **38%** y en una tendencia más débil se aproximará al **62%**.

El retroceso del 50% es una ratio de Fibonacci igual que el retroceso de dos tercios.

Razón áurea

Al número **1,6180339887543225376088304054926**… se le conoce como razón áurea. La razón áurea ha sido objeto de estudio desde la antigüedad, fue utilizada en sus orígenes para determinar las proporciones de los edificios en la antigüedad clásica.

Retrocesos de Fibonacci

En la corrección a un tramo en tendencia es frecuente que finalice próxima a **0,318** o a **0,618** del tramo previo al alza. Generalmente, los niveles mostrados serán de soporte y resistencia.

Mercado a la Baja

Para calcular los retrocesos de Fibonacci se considera todo el movimiento, desde un máximo a un mínimo. Lo expuesto será aplicable a las líneas de abanico de Fibonacci.

Objetivos de Fibonacci

Después de un tramo en tendencia vendrá una fase correctiva. El siguiente movimiento en la dirección de la tendencia estará en función del ratio de Fibonacci. Las relaciones de Fibonacci pueden aplicarse a cualquier tipo de gráfico dentro de cualquier marco temporal.

Principio de coincidencia

Cuando el nivel de retroceso de Fibonacci coincide con un objetivo de Fibonacci, 'la cota' define un importante nivel de soporte o resistencia. En un índice o valor muy líquido pueden aplicarse los principios aquí expuestos que no se aplicarán en el caso de valores estrechos.

Líneas de abanico

Siempre hay que trazar una línea de abanico de un máximo a un mínimo significativo o viceversa, y los soportes y resistencias que definen una línea de abanico pueden permanecer vigentes mucho tiempo. Los objetivos de precios y tiempo se han de considerar aproximados.

Y son estos números y porcentajes los que se aplican en los **ciclos, regresión, abanicos y arcos** de Fibonacci.

Los programas de Análisis Bursátil disponen de estas opciones de análisis complementario.

Propiedades

- La sucesión de Fibonacci tiene muchas propiedades curiosas:

- La suma de los n primeros términos es: a1 + a2 +... + an = an+2 - 1

- La suma de los términos impares es: a1 + a3 +... + a2n-1 = a2n

- La suma de los términos pares es: a1 + a4 +... + a2n = a2n+1 - 1

- La suma de los cuadrados de los n primeros términos es: a12 + a22 +... + an2 = anan+1

- Si n es divisible por m entonces an es divisible por am

- Los números consecutivos de Fibonacci son primos entre si.

- La propiedad más curiosa de esta sucesión es que el cociente de dos números consecutivos de la serie se aproxima a la razón áurea.

Biografía

Leonardo Fibonacci, también llamado Leonardo Pisano, o Leonardo de Pisa nace en Pisa, posiblemente hacia 1170 a 1180 y muere entre 1240 a 1250.

Pisa, era una importante ciudad comercial. Allí aprendió las bases del cálculo de los negocios mercantiles. Es en medio de esta actividad comercial que Leonardo comienza a formarse como mercader.

Se conoce muy poco sobre su vida; sin embargo, en el prefacio de uno de sus libros más importantes, el Liber Abaci, Leonardo comenta que fue su padre quien le enseñó Aritmética y lo animó a estudiar matemáticas mientras trabajaba como empleado en la aduana de Borgia, en Argelia, norte de África, donde los Pisanos tenían florecientes intercambios comerciales.

Cuando tenía unos 20 años, se fue a Argelia, donde empezó a aprender métodos de cálculo árabes, conocimientos que incrementó durante viajes más largos. Utilizó esta experiencia para mejorar las técnicas de cálculo comercial que conocía y para extender la obra de los escritores matemáticos clásicos, como los matemáticos griegos Diofante y Euclides.

Después de haber estudiado los métodos aritméticos de los pueblos de Oriente, recorrió Provenza, Sicilia, Grecia, Siria y Egipto, en cuyos viajes desarrolló el uso de la numeración árabe.

Se convirtió en un especialista en Aritmética y en los distintos sistemas de numeración que se usaban entonces. Muy pronto se convenció de que el sistema hindo-arábigo era superior a cualquiera de los que se usaban en los distintos países que había visitado. Decidió llevar este sistema a Italia y a toda Europa si fuese posible, donde aún se usaban los numerales romanos y el ábaco. Recordemos que los números romanos desconocen la existencia del cero. El estudio de las matemáticas y de formas más prácticas de aplicarlas como un instrumento necesario para el avance del comercio le ocupó prácticamente toda la vida.

Los mercaderes italianos estaban renuentes a utilizar estos nuevos métodos pero de a poco el sistema de numeración hindo-arábigo se introdujo en Europa gracias a la labor de Fibonacci en buena medida.

Leonardo regresó a Pisa alrededor del año 1200 y ahí comenzó a escribir libros y textos sobre matemáticas. En la época en la que vivió aún no existía la imprenta, por lo que sus libros eran escritos a mano y las copias que de ellos circulaban también se hacían a mano. Es fácil imaginar la pequeña cantidad de copias que podían circular en ese entonces y aunque parezca imposible todavía hoy se conservan copias de los siguientes libros: de la 2º edición de 1228 de “Liber Abaci”, escrito en 1202; “Practica geometriae”, escrito en 1220; “Flos”, escrito en 1225 y “Liber quadratorum”, escrito en 1227. Sin embargo son muchos más los que se perdieron en el transcurso de la historia.

Federico II (a quien dedicó el “Liber quadratorum”) fue para él un protector capaz de comprender sus estudios científicos y de apreciar su valor. El Emperador leyó y demostró comprender los textos de Fibonacci; al punto que le planteo una serie de preguntas, recibiendo como respuesta algunos interesantes corolarios sobre la teoría de las fracciones.

Hubo una activa correspondencia entre Federico II y Fibonacci. Durante la estancia de Federico II en Pisa, el ilustre matemático, introducido en la corte por el Maestro Juan de Palermo, recibió una gran acogida por parte de toda la Magna Curia. Entonces el Maestro Juan le propuso algunos problemas a resolver con ecuaciones cuadradas y cúbicas, y cuyas soluciones fueron escritas en el Flos y en el Liber quadratorum.

La reputación de Leonardo crecía de tal modo que para 1225 era reconocido como uno de los mejores matemáticos y de distintas cortes y comercios le pedían asesorías. Fue sin duda el matemático más original y hábil de toda la época medieval cristiana, pero buena parte de sus trabajos eran demasiado difíciles para ser bien comprendidos por sus contemporáneos. Debemos reconocer en él a uno de los primeros hombres que llevó la matemática árabe a Europa además de poner muy en alto el nombre de la matemática griega y darla a conocer entre los mercaderes y comerciantes, es decir sacarla de los monasterios y el monopolio de los eruditos.

Le fue concedido un salario anual por la ciudad de Pisa poco antes de su muerte, como reconocimiento de la importancia de su trabajo y como agradecimiento por el servicio público prestado a la administración de la ciudad.

Nos han quedado pocas obras de Fibonacci. Escribió sobre la teoría de números, problemas prácticos de matemáticas comerciales y geodesia, problemas avanzados de álgebra y matemáticas recreativas. Sus escritos sobre matemáticas recreativas, que a menudo los exponía como relatos, se convirtieron en retos mentales clásicos. Estos problemas entrañaban la suma de sucesiones, como la secuencia de Fibonacci que él descubrió. A cada término de esta sucesión se le denomina número de Fibonacci (la suma de los dos números que le preceden en la sucesión). También resolvió el problema del cálculo del valor para cualquiera de los números de la sucesión.

Su obra

Es autor de: ***Liber Abaci***, donde presenta una idea que, aunque parezca moderna, caracterizó el pensamiento medieval y esta conexión entre aritmética y geometría. Recordemos que los números romanos desconocían al cero. Allí utiliza el cero que en árabe se llama “zephirum”, de donde derivaron nuestras palabras “cero” y “cifra”. Allí se explica como sumar, restar, multiplicar y dividir con numerales hindo-arábigos, así como la resolución de otro tipo de problemas sobre álgebra y geometría. El “Liber Abaci” se divide en quince capítulos y pensamos que vale la pena comentar su contenido para darnos una idea de cómo estos tratados fueron fundamentales en la formación de mercaderes y comerciantes aptos en matemáticas y por tanto en el surgimiento y desarrollo del capitalismo europeo.

· Capítulo 1: Lectura y escritura de los números en el sistema hindo-arábigo.

· Capítulo 2: Multiplicación de números enteros.

· Capítulo 3: Suma de números enteros.

· Capítulo 4: Resta de números enteros.

· Capítulo 5: División de números enteros.

· Capítulo 6: Multiplicación de números enteros por fracciones.

· Capítulo 7: Fracciones.

· Capítulo 8: Precios de las mercancías más comunes.

· Capítulo 9: Comercio.

· Capítulo 10: Relaciones de parentesco.

· Capítulo 11: Conversión de Monedas.

· Capítulo 12: Problemas y soluciones.

· Capítulo 13: La regla de la falsa posición.

· Capítulo 14: Raíces cuadradas y raíces cúbicas

· Capítulo 15: Proporciones, geometría y álgebra.

Liber Quadratorum: En el 1225 lo escribió. Es un brillante trabajo sobre las ecuaciones indeterminadas de 2° grado. Muchos de los problemas provienen de los concursos matemáticos que se celebraban en la corte del emperador Federico II, a los que asistía Fibonacci como invitado.

Practica Geometricae: Es del 1220 donde aplicó el nuevo sistema aritmético para la solución de problemas geométricos: un tratado de Geometría y Trigonometría, con el cual tuvo inicio el estudio de las relaciones entre las extensiones figuradas. Aunque fue fundamentalmente algebrista, en “Practica Geometricae” hay una demostración de que las medianas de un triángulo se cortan unas a otras en segmentos que están en razón 2:1, así como un análogo tridimensional del teorema de Pitágoras.

Utiliza frecuentemente fracciones unitarias y por tanto necesita tablas de conversión de otras fracciones en unitarias

Otra obra de Fibonacci fue “Flos” de 1225.

Notas bibliográficas esenciales:

Antonino De Stefano, La cultura alla Corte di Federico II Imperatore, Edizioni all'insegna del Veltro, Parma 1990.

Ernst Kantorowicz, Federico II imperatore, Garzanti, Milano, 1988.

Eberhart Horst, Federico II di Svevia L'imperatore filosofo e poeta, Rizzoli Supersaggi, Milano, 1994.

Robert Prechter, Alzas y Bajas

Biblioteca de Consulta Microsoft ® Encarta ®.